

BASICO

PROBLEMA 1

En una mesa se encuentra quince cartas boca abajo, estas cartas tienen escrito un nueve o un quince, cuando se da una señal se voltean todas las cartas y se suman sus respectivos números ¿Es posible que el resultado de esta suma sea 226?

SOLUCIÓN:

Notemos que el máximo valor que se puede obtener en una carta es quince y como hay quince cartas, entonces el máximo valor de la suma es  $15 \cdot 15 = 225 < 226$ . Por lo cual es imposible.

PROBLEMA 2

Miguel escribe en una pizarra todos los números enteros positivos menores que diez mil que tienen exactamente dos dígitos unos consecutivos. Determinar cuántos números escribió Miguel.

SOLUCIÓN:

Es fácil ver que los números de la lista tendrán cuatro dígitos y puede tener las siguientes formas

$\overline{11ab}$  donde  $a$  tiene 9 posibilidades y  $b$  diez. Que son un total de 90

$\overline{a11b}$  donde  $a$  tiene 8 posibilidades y  $b$  nueve. Que son un total de 72

$\overline{ab11}$  donde  $a$  tiene 9 posibilidades y  $b$  nueve. Que son un total de 81

Por lo cual el total de números escritos en la pizarra es  $90 + 81 + 72 = 243$

PROBLEMA 3

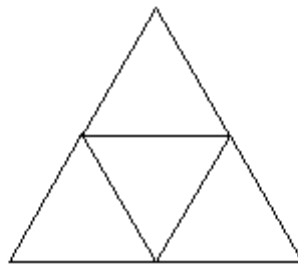
En una pizarra están escritos los números  $1, 2, 3, \dots, 2011, 2012$ . Al sonar una campana se eligen dos números del pizarrón se borran y se escribe en el pizarrón la resta de los números escogidos (el mayor menos el menor, en caso de ser iguales se escribe el cero) . Luego de varias campanadas queda un solo número en la pizarra ¿Es posible que este número sea impar?

SOLUCIÓN:

Sea  $S$  la suma de todos los números de la pizarra en un determinado instante,  $S'$  la suma de todos los números de la pizarra luego de una campanada y haber escogido los números  $a$  y  $b$ , con  $a > b$ . Obviamente  $S' = S - (a + b) + (a - b) = S - 2b$  y como  $2b$  es un número par, podemos decir que la paridad de  $S'$  y  $S$  son iguales. Entonces la paridad de la suma de los números de la pizarra es invariante y como  $1 + 2 + 3 + \dots + 2011 + 2012 = 2013 \cdot 1006$  es par, resulta imposible.

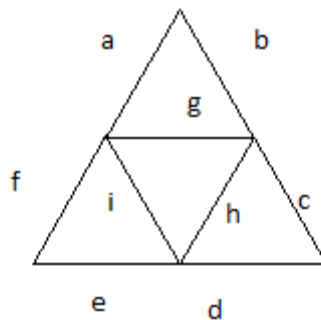
#### PROBLEMA 4

Un triángulo equilátero es dividido en cuatro triángulos pequeños como se muestra en la figura. Juan asigna a cada uno de los segmentos un número diferente del uno al nueve, de tal manera que la suma de los tres lados de cada uno de los cuatro triángulos pequeños sea la misma. Determine la suma de los segmentos de cualquier triángulo pequeño y muestre como se deberían distribuir los números para obtenerla.



SOLUCIÓN:

Sean  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  los valores asignados a los segmentos como se muestra en la figura



Y sea  $S$  la suma que debe dar al sumar los segmentos de cualquiera de los cuatro triángulos. Entonces es fácil ver que

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = (S - g) + (S - h) + (S - i) + S = 4S - (g + h + i)$$

Entonces  $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 3S \rightarrow S = 15$ . Y una configuración que cumple es la siguiente

$$a = 9, b = 1, c = 8, d = 3, e = 7, f = 2, g = 5, h = 4, i = 6$$

#### PROBLEMA 5

Sea  $ABCD$  un rectángulo y  $P$  un punto de  $AB$ ,  $X$  e  $Y$  las proyecciones de  $P$  sobre  $AD$  y  $BC$  (diagonales del rectángulo) respectivamente. Demuestre que  $PX + PY$  es constante al variar  $P$ .

#### SOLUCIÓN:

Se conoce que las diagonales de todo rectángulo son iguales y se bisecan, entonces  $AE = BE$  donde  $E$  es el punto de intersección entre  $AD$  y  $BC$ . Consideremos la suma de las áreas de los triángulos  $APE$  y  $BEP$ , suma siempre es igual a el área del triángulo  $AEB$  independientemente de  $P$ . Además podemos observar que

$$[APE] + [BEP] = \frac{1}{2} (AE \cdot PX + BE \cdot PY) = \frac{AE}{2} (PX + PY)$$

Y como  $AE$  es constante se concluye que  $PX + PY$  es constante y terminamos el problema.

#### PROBLEMA 6

En un torneo de tenis, participan varios jugadores en modalidad todos contra todos. Luego del torneo cada uno escribe una lista con los nombres de los jugadores que venció y aquellos que fueron vencidos por los que venció. Pruebe que existe un jugador cuya lista contiene los nombres de todos los otros jugadores.

#### SOLUCIÓN:

Sea  $A$  el jugador cuya lista contiene la mayor cantidad de nombres, supongamos que  $A$  no tiene los nombres de todos los otros jugadores en su lista. Esto implica que debe de haber perdido contra algún jugado, sea  $A'$  este jugador. Entonces  $A'$  también debió haberle ganado a todos los jugadores que venció  $A$ , por lo cual  $A'$  tiene en su lista los mismos nombres que la lista de  $A$  y además el nombre de  $A$ . Pero entonces se contradice el hecho de que  $A$  no tiene el nombre de todos los jugadores en su lista. Por tanto queda demostrado.